Espaces vectoriels euclidiens

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. n et p désignent des entiers naturels.

I. Produit scalaire

1°) Définition

Déf : On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y) \end{cases}$ telle que :

1. φ est une forme bilinéaire
2. φ est symétrique i.e. $\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
3. φ est positive i.e. $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$
4. φ est définie i.e. $\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

2°) Notions métriques

a) inégalité de Cauchy Schwarz

Théorème :

$\forall x,y \in E$, $(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)$.

De plus, il y a égalité ssi x et y sont colinéaires.

Cor : Pour $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ on a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

Pour $f,g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ on a $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$.

b) norme euclidienne

Déf : Soit $x \in E$, on appelle norme euclidienne (ou longueur) du vecteur x le réel $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Prop : $\forall x,y \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$\|x\| \geq 0$,

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$,

$|(x \mid y)| \leq \|x\|.\|y\|$ avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Théorème : (Inégalité triangulaire)

$\forall x,y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

De plus, il y a égalité ssi x et y colinéaires et $(x \mid y) \geq 0$ (i.e. x et y ont même direction et même sens)

Cor : (Inégalité triangulaire renversée)

$\forall x,y \in E, \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Prop : (Identités remarquables)

$\forall x,y \in E$:

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$,

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$,

$(x+y \mid x-y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$,

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (identité du parallélogramme) et

$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x \mid y)$ (identité de polarisation)

c) distance euclidienne

Déf : Soit x et y deux vecteurs de E. On appelle distance euclidienne de x à y le réel : $d(x,y) = \|y-x\|$

Prop : $\forall x,y,z \in E$:

$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

$d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

d) écart angulaire formé par deux vecteurs

Soit u et v deux vecteurs non nuls de E.

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on a : $\dfrac{(u\mid v)}{\|u\|.\|v\|}\in[-1,1]$.

Donc $\exists!\theta\in[0,\pi]$ tel que $(u\mid v)=\|u\|.\|v\|.\cos\theta$.

Déf : Ce réel θ est appelé écart angulaire entre les vecteurs u et v.
On note $\theta=\text{Ecart}(u,v)$ $(\in[0,\pi])$.

Prop : $\text{Ecart}(u,v)=\text{Ecart}(v,u)$

$\text{Ecart}(-u,v)=\pi-\text{Ecart}(u,v)$

$\text{Ecart}(u,v)=0$ ssi u et v ont même direction et même sens.

$\text{Ecart}(u,v)=\pi$ ssi u et v ont même direction et sont de sens opposés.

Déf : On dit que u et v forment un angle aigu (resp. obtus, droit) ssi $\text{Ecart}(u,v)\in[0,\pi/2]$ (resp. $\text{Ecart}(u,v)\in[\pi/2,\pi]$, $\text{Ecart}(u,v)=\pi/2$).

3°) Vecteurs orthogonaux

a) famille orthogonale

Déf : Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux ssi $(x\mid y)=0$.

Déf : On dit qu'une famille $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs de E est orthogonale ssi $\mathcal{F}$ est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux i.e. $\forall 1\le i\ne j\le n,(e_i\mid e_j)=0$.

Prop : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre.

Théorème : de Pythagore

Si $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_n)$ une famille orthogonale : $\|e_1+\cdots+e_n\|^2=\|e_1\|^2+\cdots+\|e_n\|^2$.

b) famille orthonormée

Déf : On dit qu'un vecteur x de E est unitaire (ou normé) ssi $\|x\|=1$.

Normer un vecteur non nul x , c'est considérer le vecteur unitaire $u=x/\|x\|$.

Déf : Soit $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_n)$ un famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormée ssi $\mathcal{F}$ est constituée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux i.e. $\forall 1\le i,j\le n,(e_i\mid e_j)=\delta_{i,j}$.

Prop : Toute famille orthonormée est libre.

c) procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Théorème :

Soit $\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de vecteurs de E .

On peut construire une famille orthonormée $(v_1,\dots,v_n)$ telle que :

$\forall 1\le k\le n,\text{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\text{Vect}(v_1,\dots,v_k)$

4°) Orthogonal d'une partie

Déf : Soit A une partie de E .

On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$ constitué des vecteurs orthogonaux a tout vecteur de A i.e. $A^\perp=\{x\in E/\forall a\in A,(a\mid x)=0\}$.

Prop : Soit A et B deux parties de E :

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

$A \subset A^{\perp\perp}$

$A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

$A^{\perp} = \text{Vect}(A)^{\perp}$.

5°) Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Déf : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux ssi $\forall (x,y) \in F \times G, (x \mid y) = 0$. On note $F \perp G$.

Prop : Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{\vec{o}\}$.

Prop : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On a équivalence entre :
(i) F et G sont orthogonaux
(ii) $F \subset G^{\perp}$
(iii) $G \subset F^{\perp}$.

II. Espaces vectoriels euclidiens

1°) Définition

Déf : On appelle espace vectoriel euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Désormais, E désigne un espace vectoriel euclidien.

2°) Base orthonormée

Déf : On appelle base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E toute base de E constituée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

Théorème :
Tout espace vectoriel euclidien E possède une base orthonormée.

Théorème : de la base orthonormée incomplète
Soit E une espace vectoriel euclidien de dimension n.
Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E
alors on peut compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de E de la forme $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Théorème :
Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x) e_i$.
Par suite les composantes de x dans $\mathcal{B}$ sont les $(e_1 \mid x), \ldots, (e_n \mid x)$.

Théorème :
Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Pour $x, y \in E$ de composantes : $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$, on a :
$(x \mid y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ et $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

3°) Supplémentaire orthogonal

Théorème :
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E.
$F^{\perp}$ est un supplémentaire de F dans E.

Déf : $F^{\perp}$ est appelé supplémentaire orthogonal de F.

Cor : $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Prop : Soit F et G sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.
$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

4°) Vecteur normal à un hyperplan

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Déf : Soit H un hyperplan de E. La droite vectorielle $H^\perp$ est appelée droite normale à H et tout vecteur directeur de celle-ci est appelé vecteur normal à H.

Prop : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et H un hyperplan de E.
Un vecteur a de composantes $a_1,\dots,a_n$ est normal à H ssi $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ est une équation de H.

5°) Représentation d'une forme linéaire

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Pour $a\in E$, on note $\varphi_a:\begin{cases}E\to\mathbb{R}\\ x\mapsto(a\mid x)\end{cases}$.

Prop : φ_a est une une forme linéaire sur E de noyau $\{a\}^\perp$.

Théorème :
$\forall f\in E^*,\exists!a\in E$ tel que $f=\varphi_a$ i.e. tel que $\forall x\in E, f(x)=(a\mid x)$.

6°) Produit mixte

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

Prop : Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ deux bases orthonormées de E.
On a $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'=\pm1$.

Théorème :
Si $(x_1,...,x_n)$ est une famille de $n=\dim E$ vecteurs de E alors la quantité $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$ est indépendante de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie.

Déf : Cette quantité est appelée produit mixte des vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$, on la note $\mathrm{Det}(x_1,...,x_n)$ ou $[x_1,...,x_n]$.

Prop : L'application $\begin{cases}E^n\to\mathbb{R}\\ (x_1,...,x_n)\mapsto[x_1,...,x_n]\end{cases}$ est une forme n linéaire alternée et antisymétrique.
De plus
$[x_1,...,x_n]=0\Leftrightarrow(x_1,...,x_n)$ est liée.
$[x_1,...,x_n]>0\Leftrightarrow(x_1,\dots,x_n)$ base directe.
$[x_1,...,x_n]<0\Leftrightarrow(x_1,\dots,x_n)$ base indirecte.

7°) Produit vectoriel en dimension 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit u et v deux vecteurs de E. L'application $f:E\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\mathrm{Det}(u,v,x)$ est une forme linéaire sur E, donc : $\exists!w\in E,\forall x\in E,\mathrm{Det}(u,v,x)=(w\mid x)$.

Déf : Ce vecteur w est appelé produit vectoriel de u par v, on le note $u\wedge v$.

Prop : L'application $\begin{cases}E\times E\to E\\ (u,v)\mapsto u\wedge v\end{cases}$ est bilinéaire antisymétrique.

Prop : $\forall u,v\in E,(u\wedge v\mid u)=(u\wedge v\mid v)=0$

Prop : $\forall u,v\in E$, (u,v) est libre ssi $u\wedge v\neq0$.
De plus, si tel est le cas, $(u,v,u\wedge v)$ est une base directe.

Prop : Si (i,j,k) est une base orthonormée directe de E alors
$i\wedge j=k, j\wedge k=i$ et $k\wedge i=j$.

Prop : Soit (i,j,k) une base orthonormée directe de E.
Soit $u=xi+yj+zk, v=x'i+y'j+z'k$.
On a $u\wedge v=(yz'-y'z)i+(zx'-z'x)j+(xy'-x'y)k$.

Prop : (Formule du double produit vectoriel)
$\forall u,v,w\in E$, $u\wedge(v\wedge w)=(u\mid w)v-(u\mid v)w$.

Prop : (Identité de Lagrange)

$\forall u,v \in E, (u \mid v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

Prop : $\forall u,v \in E$ non nuls. Notons $\theta = \text{Ecart}(u,v)$. On a $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|\sin\theta$.

III. Projection et symétries orthogonales

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1°) Projection orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E , F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .

Déf : On appelle projection orthogonale sur F la projection vectorielle p_F sur F selon la direction $F^\perp$.

Prop : $p_F \in \mathcal{L}(E), {p_F}^2 = p_F, \text{Im}\, p_F = F$ et $\ker p_F = F^\perp$.

De plus $I - p_F$ est la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Prop : Si $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ est une base orthonormée de F alors :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{j=1}^{p} (x \mid e_j) e_j \ .$$

Théorème : (caractérisation des projections orthogonales)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

On a équivalence entre :

(i) p est une projection orthogonale

(ii) $p^2 = p$ et $\forall x,y \in E, (p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$.

Cor : La matrice représentative d'une projection orthogonale p dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ est symétrique.

2°) Distance à un sous-espace vectoriel

Déf : Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$.

On appelle distance de x à F le réel $d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y) = \inf_{y \in F} \|y - x\| \in \mathbb{R}^+$.

Prop : Soit F un sous-espace vectoriel de E , $x \in E$.

$\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi $y = p_F(x)$.

Par suite, $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.

Prop : On suppose E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$.

Soit H un hyperplan d'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ et x un vecteur de E de composantes dans $\mathcal{B}$: $x_1,...,x_n$. On a $d(x,H) = \dfrac{|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$.

3°) Symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E .

F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .

Déf : On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie vectorielle s_F par rapport à F et selon la direction $F^\perp$. Si F est un hyperplan de E , on dit que s_F est la réflexion par rapport à F .

Prop : $s_F \in \mathcal{L}(E)$, ${s_F}^2 = \text{Id}$, $\ker(s_F - I) = F$ et $\ker(s_F + I) = F^\perp$.

$-s_F = s_{F^\perp}$ et $s_F = 2p_F - \text{Id}$

Prop : Si $\mathcal{B} = (e_1,...,e_p)$ est une base orthonormée de F alors :

$$\forall x \in E, s_F(x) = 2\sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i - x \ .$$

Théorème :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) s est un symétrie orthogonale
(ii) $s^2 = \mathrm{Id}$ et $\forall x, y \in E, (s(x) \mid y) = (x \mid s(y))$.

Cor : La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.

Cor : Les symétries orthogonales conservent le produit scalaire :
$\forall x, y \in E, (s(x) \mid s(y)) = (x \mid y)$.
En particulier, les symétries orthogonales conservent la norme :
$\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$.

IV. Automorphismes orthogonaux

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Matrices orthogonales

Déf : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
On note $O(n)$ l'ensemble de ces matrices.

Prop : $O(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Déf : $O(n)$ est appelé groupe orthogonal d'ordre n .

Prop : $\forall A \in O(n)$ on a $\det A = \pm 1$.

Déf : Les matrices orthogonales de déterminant 1 (resp. -1) sont qualifiées de positives (resp. négatives).

Prop : $SO(n) = \{A \in O(n) / \det A = 1\}$ est un un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Déf : $SO(n)$ est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n .

Prop : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une famille de vecteurs de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.
On a équivalence entre :
(i) $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E
(ii) $P \in O(n)$.
De plus, si tel est le cas, P apparaît comme étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ tandis que ${}^tP = P^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

2°) Caractérisation des matrices orthogonales

Le produit scalaire canonique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par :

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on pose $(X \mid Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Le produit scalaire canonique sur $M_{1,n}(\mathbb{R})$ est définie par :

Pour $X = (x_1 \quad \ldots \quad x_n)$ et $Y = (y_1 \quad \ldots \quad y_n)$ on pose $(X \mid Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Théorème :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ et de lignes $L_1, \ldots, L_n$.
On a équivalence entre :
(i) A est orthogonale
(ii) la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthonormale
(iii) la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est orthonormale.

Par suite
$A \in O(n) \Leftrightarrow {}^tAA = I_n \Leftrightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, (C_i \mid C_j) = \delta_{i,j}$
Ainsi $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
De même, en calculant $A\,{}^tA$, on obtient $(i) \Leftrightarrow (iii)$

3°) Automorphismes orthogonaux

Déf : On appelle endomorphisme orthogonal de E tout $f \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve le produit scalaire i.e. tel que : $\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.

On note $O(E)$ l'ensemble de ces applications.

Prop : Si $f \in O(E)$ alors f conserve :

la norme : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$

l'orthogonalité : $\forall x, y \in E, (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y))$.

les écarts angulaires : $\forall x, y \in E$ non nuls, $\text{Ecart}(f(x), f(y)) = \text{Ecart}(x, y)$.

Prop : Si $f \in O(E)$ alors f est un automorphisme.

On parle indifféremment d'endomorphisme ou d'automorphisme orthogonal voire d'isométrie.

Prop : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Déf : On l'appelle groupe orthogonal de E.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

On a équivalence entre :

(i) $f \in O(E)$

(ii) $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée

(iii) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O(n)$.

Cor : Etant donnés deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, il existe un unique automorphisme orthogonal transformant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Cor : Si $f \in O(E)$ alors $\det(f) = \pm 1$.

Déf : Les automorphismes orthogonaux de déterminant 1 (resp. -1) sont qualifiés de positifs (resp. négatifs).

Prop : $SO(E) = \{f \in O(E) / \det f = 1\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Déf : $SO(E)$ est appelé groupe des isométries positives de E.

V. Automorphismes orthogonaux du plan euclidien

E désigne un plan euclidien orienté, par exemple E peut être l'ensemble des vecteurs du plan géométrique ou $\mathbb{R}^2$.

1°) Matrice de rotation

Déf : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle matrice de rotation d'angle θ la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O^+(2)$.

Prop : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$R(\theta) = R(\theta') \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$

$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$

$R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)$.

Théorème :

$\forall M \in O^+(2)$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près tel que : $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Cor : $O^+(2) = \{R(\theta) / \theta \in \mathbb{R}\}$ et par suite $O^+(2)$ est un groupe abélien.

2°) Rotation du plan euclidien orienté

Théorème :

La matrice de tout endomorphisme $r \in O^+(E)$ est la même dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Plus précisément il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près tel que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Déf : L'automorphisme orthogonale représenté par $R(\theta)$ dans les bases orthonormées directes est appelée rotation d'angle θ et est notée Rot_θ.

Prop : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$

$\text{Rot}_\theta = \text{Rot}_{\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$

$\text{Rot}_\theta \circ \text{Rot}_{\theta'} = \text{Rot}_{\theta+\theta'} = \text{Rot}_{\theta'} \circ \text{Rot}_\theta$

$\text{Rot}_\theta{}^{-1} = \text{Rot}_{-\theta}$.

Cor : $O^+(E) = \{\text{Rot}_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$ est un groupe abélien.

3°) Angle orienté dans le plan

a) angle de deux vecteurs

Soit u et v deux vecteurs non nuls de E.

Posons $U = u/\|u\|$ et $V = v/\|v\|$.

$\exists \theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près tel que $\text{Rot}_\theta(U) = V$.

Déf : Ce réel θ, défini à 2π près, est appelé mesure de l'angle orienté de u à v. On note $\theta = (u, v) \quad [2\pi]$.

b) propriétés

Prop : $\forall u, v \in E \setminus \{0\}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$: $(\lambda u, \mu v) = (u, v) \quad [2\pi]$.

Prop : $\forall u, v, w \in E \setminus \{0\}$:

$(u, v) = (u, w) + (w, v) \quad [2\pi]$

$(v, u) = -(u, v) \quad [2\pi]$.

Prop : Soit $u, v \in E \setminus \{0\}$ et $\theta = (u, v) \quad [2\pi]$

On a $(u \mid v) = \|u\|\|v\|\cos\theta$ et $\text{Det}(u, v) = \|u\|\|v\|\sin\theta$.

De plus ces deux relations déterminent θ à 2π près.

Cor : u et v sont orthogonaux ssi $(u, v) = \pi/2 \quad [\pi]$

u et v sont colinéaires ssi $(u, v) = 0 \quad [\pi]$.

c) lien entre angle orienté et écart angulaire

Soit $u, v \in E \setminus \{0\}$.

Notons $\alpha = \text{Ecart}(u, v)$.

α est déterminé par $(u \mid v) = \|u\|\|v\|\cos\alpha$ et $\alpha \in [0, \pi]$.

Notons $\theta = (u, v) \quad [2\pi]$.

θ est déterminé à 2π près par $\begin{cases} (u \mid v) = \|u\|\|v\|\cos\theta \\ \text{Det}(u, v) = \|u\|\|v\|\sin\theta \end{cases}$.

On a donc $\cos\theta = \cos\alpha$ puis $\theta = \alpha \quad [2\pi]$ ou $\theta = -\alpha \quad [2\pi]$.

Si (u, v) est une base directe alors $\text{Det}(u, v) > 0$ et alors $\theta = \alpha \quad [2\pi]$.

Si (u, v) est une base indirecte alors $\theta = -\alpha \quad [2\pi]$.

d) angle orienté de deux droites

Soit D et D' deux droites vectorielles

$\exists \theta \in \mathbb{R}$, unique à π près tel que : $D' = \text{Rot}_\theta(D)$.

Déf : Ce réel θ, défini à π près, est appelé mesure de l'angle orienté de D à D'. On note $\theta = (D, D') \quad [\pi]$.

Prop : Soit D, D', D'' des droites vectorielles de E.

$(D, D') + (D', D'') = (D, D'') \quad [\pi]$,

$(D', D) = -(D, D') \quad [\pi]$,

$D \perp D' \Leftrightarrow (D, D') = \pi/2 \quad [\pi]$,
$D = D' \Leftrightarrow (D, D') = 0 \quad [\pi]$.

4°) Classification

Théorème :

Soit $\mathcal{B} = (i, j)$ une base orthonormée de E. Pour tout automorphisme orthogonal négatif s de E il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

De plus s correspond alors à la réflexion par rapport à la droite vectorielle dirigée par $u = \cos(\varphi/2)i + \sin(\varphi/2)j$.

Théorème :

Les automorphismes orthogonaux positifs sont les rotations vectorielles, celles-ci commutent entres elles et ont même représentation dans toutes bases orthonormées directes.
Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan sont les réflexions.

Cor : La composée de deux rotations est une rotation.
La composée de deux réflexions est une rotation.
La composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion.

Prop : Toute rotation du plan peut s'écrire comme produit de deux réflexions, l'une d'elle étant quelconque.

Cor : Tout automorphisme orthogonal du plan peut s'écrire comme un produit d'au plus deux réflexions.

5°) Composition d'automorphismes orthogonaux.

Prop : Les rotations du plan conservent les angles orientés et les réflexions du plan les changent en leur opposé.

Prop : Soit σ et σ' deux réflexions par rapport à deux droites D et D'.
On a $\sigma' \circ \sigma = \mathrm{Rot}_{2\theta}$ où $\theta = (D, D') \quad [\pi]$.

Prop : Soit r une rotation d'angle θ et σ une réflexion par rapport à D.
$\sigma' = r \circ \sigma$ est la réflexion par rapport à $D' = \mathrm{Rot}_{\theta/2}(D)$
$\sigma'' = \theta \circ r$ est la réflexion par rapport à $D'' = \mathrm{Rot}_{-\theta/2}(D)$.

VI. Automorphismes orthogonaux de l'espace de dimension 3

E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
(par ex. E peut être l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique ou $\mathbb{R}^3$)

1°) Orientation induite

Soit P un plan de E et $D = P^{\perp}$ sa droite normale.
Il n'existe pas d'orientation préférentielle ni sur P, ni sur D.
Choisissons une orientation sur D et soit u un vecteur unitaire direct de D.
Complétons u en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E.

La famille (v, w) est une base orthonormée de P. En choisissant celle-ci pour base orientée de référence, on dit qu'on a muni le plan P de l'orientation induite de celle de D. En effet on peut montrer que cette orientation est indépendante de la manière dont on a complété u en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

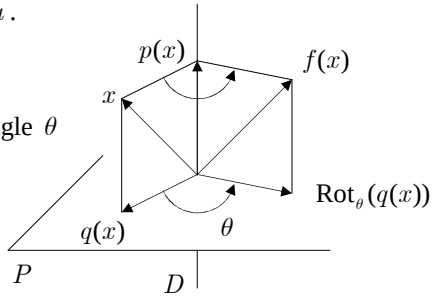
2°) Rotation de l'espace de dimension 3

a) définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et D une droite vectorielle orientée par un vecteur unitaire u.
Notons $P = D^{\perp}$ muni de l'orientation induite.

Soit p la projection orthogonale sur D et $q = \mathrm{Id} - p$ celle sur P.
$\forall x \in E$, on pose $f(x) = p(x) + \mathrm{Rot}_{\theta}(q(x))$ où Rot_{θ} est la rotation d'angle θ du plan euclidien P.

Déf : L'application f est appelée rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ. On note $f = \mathrm{Rot}_{u,\theta}$.



Prop : f est un endomorphisme tel que : $f_{|D} = \mathrm{Id}_D$ et $f_{|P} = \mathrm{Rot}_\theta$.

Prop : Si $\theta = 0 \quad [2\pi]$ alors $f = \mathrm{Id}$

Si $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$ alors les vecteurs invariants par f sont ceux de D .

Prop : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de E de la forme $\mathcal{B} = (u, v, w)$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(3) .$$

Cor : Les rotations sont des automorphismes orthogonaux positifs de E .

Prop : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Rot}_{u,\theta} = \mathrm{Rot}_{u,\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$

$\mathrm{Rot}_{u,\theta} \circ \mathrm{Rot}_{u,\theta'} = \mathrm{Rot}_{u,\theta+\theta'} = \mathrm{Rot}_{u,\theta'} \circ \mathrm{Rot}_{u,\theta}$.

$\mathrm{Rot}_{u,\theta}^{-1} = \mathrm{Rot}_{u,-\theta}$.

b) représentation matricielle dans une base orthonormée quelconque

Prop : Soit f la rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire u et d'angle θ .

$\forall x \in D^\perp, f(x) = \cos\theta . x + \sin\theta . (u \wedge x)$.

c) retournement

Déf : Soit D une droite vectorielle de E . On appelle retournement (ou demi-tour) autour de D la rotation d'axe D et d'angle π . On la note Ret_D .

Prop : Ret_D est aussi la symétrie orthogonale par rapport à D .

3°) Classification des automorphismes orthogonaux de l'espace

a) préliminaires

lemme :(E espace vectoriel quelconque)

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\forall x \in F, f(x) = g(x)$ et $\forall x \in G, f(x) = g(x)$ alors $f = g$.

lemme : (E espace vectoriel euclidien quelconque)

Soit $f \in O(E)$ et $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ le sous-espace vectoriel formé des vecteurs invariants par f .

$F^\perp$ est stable par f et $f_{|F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$ dont le vecteur nul est le seul vecteur invariant.

lemme : (E espace vectoriel euclidien de dimension 3)

$\forall f \in SO(E), \exists u \in E$ unitaire tel que $f(u) = u$.

b) classification

Théorème :

Soit $f \in O(E)$ et $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ le sous-espace vectoriel formé des vecteurs invariants par f .

Si $\dim F = 3$ alors $f = \mathrm{Id}$.

Si $\dim F = 2$ alors f est la réflexion de plan $P = F$.

Si $\dim F = 1$ alors f est une rotation vectorielle autour de $D = F$.

Si $\dim F = 0$ alors f est la composée commutative d'une réflexion par rapport à un plan P et d'une rotation autour de sa droite normale $D = P^\perp$

Cor : Les automorphismes orthogonaux positifs de E sont les rotations.

Cor : Les automorphismes orhogonaux negatifs possédant d'autres vecteurs invariants que le vecteur nul sont les réflexions.

4°) Composition d'automorphismes orthogonaux

Prop : La composée de deux rotations de l'espace est une rotation.

Prop : La composée de deux réflexions distinctes de l'espace est une rotation autour de la droite intersection des plans de réflexion.

Prop : Toute rotation f d'axe D peut s'écrire comme produit de deux réflexions par rapport à des plans contenant D l'une d'elles pouvant être choisie de manière quelconque.

Cor : Tout automorphisme orthogonal de l'espace peut s'écrire comme un produit d'au plus trois réflexions.

5°) Réduction d'automorphismes orthogonaux

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ connu par sa matrice A dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Si $A \in O(3)$ alors $f \in O(E)$. Etudions f.

On détermine l'ensemble des vecteurs invariants par f : $F = \ker(f - \mathrm{Id})$.

Si $\dim F = 3$ alors $f = \mathrm{Id}$.

Si $\dim F = 2$ alors f est la réflexion par rapport au plan F.

Si $\dim F = 1$ alors f est une rotation autour de la droite $D = F$.

On choisit alors un vecteur unitaire u de D. On oriente D par celui-ci et on munit $P = D^{\perp}$ de l'orientation induite. Déterminons l'angle θ de notre rotation.

Dans une base orthonormée directe de la forme $\mathcal{B}' = (u, v, w)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{tr}(f) = 2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}(A)$, ceci donne $\cos\theta$.

Pour conclure il suffit de déterminer le signe de $\sin\theta$.

Soit $x = \alpha.u + \beta.v + \gamma.w \notin D$.

$$\mathrm{Det}(u, x, f(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta \\ 0 & \gamma & \beta\sin\theta + \gamma\cos\theta \end{vmatrix} = (\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta .$$

Ainsi le signe de $\sin\theta$ est celui de $\mathrm{Det}(u, x, f(x))$.

Si $\dim F = 0$: hors-programme.